Георгий Щедровицкий
Вадим Розин
Никита Алексеев
Нелли Непомнящая

ПЕДАГОГИКА И ЛОГИКА

КАСТАЛЬ, Москва, 1993.

Н. Г. Алексеев

ФОРМИРОВАНИЕ ОСОЗНАННОГО РЕШЕНИЯ УЧЕБНОЙ ЗАДАЧИ*

I. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБ ОСОЗНАННОСТИ, ПРОЦЕДУРЫ ПРОВЕРКИ

Когда в психолого-педагогическом исследовании говорят об осознанном решении учебной задачи, то, по сути дела, имеют в виду наличие у решающего задачу особой связи трех компонентов: понимания поставленной задачи, представления конкретной ситуации и соответствующего построения порядка действий. При этом задача выступает как требование дать ответ на точно поставленный в условии вопрос в некоторой общественно-зафиксированной форме, а конкретная ситуация через сами эти условия. В каждом конкретном случае построение порядка действий определяется первыми двумя компонентами.

Для такого представления характерно, что все три входящих в эту связь компонента могут изменяться по форме своего выражения. В условиях задач могут описываться самые разные предметные действительности; так, среди алгебраических мы видим задачи на движение, работу, стоимостные отношения, удельный вес и т. д. Точно так же двигаться могут и два поезда, и один поезд в два конца, двигаться могут всадники и велосипедисты и т. п. Могут быть разными численные значения величин, характеризующих движение. И в этом смысле задачи из сборника выступают как разные, ибо в них при тождестве всего остального заданы различные предметные ситуации. Сходным образом мы получим различия, меняя вид задаваемого в вопросе задачи конкретного окончательного продукта — либо это будет число, характеризующее некоторую величину, либо число, характеризующее соотношение двух величин, например: насколько скорость одного тела больше скорости другого или во сколько раз производительность первого рабочего больше производительности второго и т. д. Различия в форме предметной ситуации и поставленной задачи приводят к различиям в форме выражения некоторых действий решения, что легко обнаруживается сопоставлением

* Мысли, сформулированные в этой статье, стали исходным пунктом диссертационных исследований автора; предполагается издать его отдельной монографией.

решения двух только в таком плане отличающихся задач.

Разведя форму выражения различных компонентов задачи и безотносительное к этой форме определенное единство в решении задачи, мы можем раскрыть первый характерный момент данного представления об осознанности. Если учащийся решил задачу о движении велосипедистов, но тут же не решил задачу о движении поезда, отличающуюся от первой лишь формой предметной ситуации, то и первому решению придется отказать в наличии такой характеристики, как осознанность. Короче, мы можем говорить об осознанности решения лишь тогда, когда решаются все задачи данного класса, независимо от внешней формы их выражения. Это эквивалентно тому, что осознанность предполагает типологичность связи трех вышеназванных компонентов решения задачи. Отсюда следует, что для каждого отдельного класса или типа задач существует одна единая связь трех компонентов, не меняющаяся внутри возможных вариаций в самом типе [1].

Психологическое представление о том, что осознанная деятельность решения учебных задач характеризуется особой связью трех компонентов, складывается на основе рефлексивного осознания процедур по проверке умения решать все задачи данного типа [2]. В данное время такие процедуры общеизвестны, они вошли в плоть и кровь не только научной, но и повседневной практики. Это небольшое варьирование условий и изменения постановки задачи, не затрагивающие способов решения. Как мы выясним позднее, в неприкосновенности остаются основные средства, характеризующие данный способ. Нетрудно построить процедуру проверки усвоенности какого-либо одного способа решения задач. Но поскольку таких способов много, возникает задача построить знание, которое служило бы критерием добротности, полноты процедуры проверки для любого способа. Только

---

[1] Принадлежность задач к одному типу выявляется в логическом анализе деятельности решения задач и употребляемых в ней средств, при этом к одному и тому же типу относятся задачи, решаемые одним способом. Логически анализируемый способ решения выступает как норма решения, которая должна быть усвоена индивидом. По поводу понятия «способ решения» см. работу [9]. См. также раздел V данной работы.

[2] Оговоримся, что в большинстве случаев сам «тип» в педагогике понимается, исходя из интуиции, а не на базе строгого логического анализа, практически-конкретно, а не теоретически.

при решении такой рефлексивной задачи и формируется представление об осознанности как факторе, позволяющем решить все задачи данного типа, а сама осознанность понимается как особая связь трех компонентов. Это представление, возникнув, становится регулятивом построения процедур и проверки усвоенности способа решения какого-либо типа задач.

II. СМЕШЕНИЕ ПРОЦЕДУР ПРОВЕРКИ С ПРОЦЕДУРАМИ, ПРИВОДЯЩИМИ К ПОЯВЛЕНИЮ ОСОЗНАННОГО РЕШЕНИЯ

Как это не покажется странным, часто допускается смешение процедур проверки наличия осознанного решения с процедурами, приводящими к появлению осознанного решения, или, другими словами, допускается смешение процедур, приводящих к формированию способа решения, с процедурами, на основании которых мы определяем, имеется этот способ решения или нет.

Это выражается в частности в том, что пытаются добиться осознанного решения за счет таких процедур, как варьирование несущественных признаков усвоения [1], за счет незначительного видоизменения в постановке задачи и т. д., т. е. как раз за счет того, что и составляет содержание процедур проверки, а в формирование способа решения входит лишь как небольшая часть.

Применительно к алгебраическим задачам это выглядит так. Говорят, что, для того чтобы добиться осознанного решения задач на движение, надо варьировать такие признаки, как то, что движется (велосипедист, реактивный самолет, пенсионер и т. д.), как и куда движется, какие численные значения имеют характеристики этих движений и т. д. Говорят, что нужно варьировать то, что должно быть узнано: скорость, время, путь или какое-либо соотношение этих величин. Далее точно так же надо поступать с задачами на работу, стоимостные отношения и т. д. В итоге, утверждают, вы получите осознанное решение задач такого типа.

[1] Не совсем ясно, какой смысл вкладывается в слова «несущественные признали». Когда мы говорим о процедурах проверки, то там варьирование определяется целостностью способа. И в этом смысле термин «несущественный» можно определить как указание на то, что любое варьирование должно оставаться в пределах данного способа, который, мы проверяем. Когда же говорят о варьировании при решении задач, то термин несущественности теряет этот смысл.

Многочисленны попытки теоретически обосновать такой метод работы. Затруднительно выяснить реальный ход рассуждения, приведший к отождествлению двух различных групп процедур — проверки и построения. Трудность объясняется тем, что это смешение и отождествление проводятся в рамках общей теории педагогики, исходя из ее принципов: вопросы, связанные с осознаностью деятельности, являются в ней частными, и их решение определяется основными методологическими принципами теории в целом. И для того чтобы понять, чем вызваны данные ошибки, нужно проанализировать именно эти методологические установки. Анализ последних слишком увел бы нас в сторону от основной темы. Поэтому мы можем дать лишь возможную схему рассуждения, приведшего к отождествлению процедур проверки сформированности способа с процедурами формирования способа. Исходят из такого феномена как осознание. В чем же их специфика по сравнению с другими процессами? При этом ставят вопрос о процессах осознания способов решения. Таким общим для процессов осознания оказывается стереотипная процедура формирования способа отождествления с процедурами проверки наличия способа решения.

Подобное смешение пытаются оправдать также апелляцией к практике обучения. Могут сказать: «Посмотрите, как учат решению алгебраических задач! Дают их, скажем, десятка полтора-два на один и тот же тип, при этом варьируются предметные ситуации, величины и их отношения, постановка вопроса, и в итоге мы получаем у большинства учащихся вполне осознанное решение этих задач, готовый способ решения. Почему же нельзя считать эти процедуры варьирования за то, что ведет к появлению осознанного решения? Не впадаете ли вы со своими проведенными различениями в ненужные для практики обучения схоластические тонкости?» С такими возражениями приходится считаться, хотя сразу скажем, что ссылка на действующую практику обучения не является убедительной, ибо всегда задача состоит в том, чтобы ее изменить, а не узаконить. Несомненно, что в школе обучают детей именно так; это имеет своим основанием то, что самих учителей учат обучать только так, а не иначе. Но нужно ли так обучать, лучший ли это путь — вот вопрос.

Мы хотим выделить иной путь обучения и сопоставить его с описанным выше. Мы выдвинем общую гипотезу на этот счет, а потом подробно разберем формирование одного из способов решения типовых алгебраических задач. Полученные результаты позволяют говорить о повышении качества и уменьшении сроков обучения.

III. АНАЛИЗ ПРИМЕНЯВШИХСЯ В АКТЕ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СРЕДСТВ, КАК ОСНОВНОЙ МОМЕНТ ФОРМИРОВАНИЯ СПОСОБА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Прежде всего уточним понятие «процедура», которым мы часто пользуемся. Под *процедурой* мы будем понимать действие, для которого в каждом конкретном рассматриваемом случае можно выделить его цель и которое можно описать в словах естественного языка. Такое определение, не претендуя на точность, весьма удобно как рабочее и позволяет ряд других терминов — «операция», «процесс» и т. д.— использовать для иных целей.

Теперь способ решения можно представить как совокупность процедур. Первый вопрос: что же определяет процедуры некоторого способа решения учебной задачи? Вопрос можно переформулировать иначе: на основе чего они строятся? Нам представляется единственно возможным ответ, что процедура строится на основании определенных *средств*. Поясним этот ответ примером. Пусть нам требуется вычислить куб числа 83 345. Как известно из курса средней школы, к ответу можно прийти разными путями, т. е. строя каждый раз различные совокупности процедур. Самый простой путь — трижды перемножить число 83 345 само на себя, но он слишком долог. Можно вычислить эту степень, используя таблицу логарифмов. Возможен третий путь — по определенным правилам обращения с таблицей кубов найти в ней соответствующее число. Характерно, что в разобранном нами примере поставлена одна задача, но не детерминирован жестко путь ее решения. За счет привлечения разных средств мы получаем каждый раз отличные друг от друга процедуры и последовательности процедур, приводящие

к одному и тому же ответу. В первом случае в качестве такого средства выступают знания о степени как о повторном произведении числа самого на себя столько раз, сколько единиц содержит показатель степени, а также средства особого рода — оперативная система арифметики, включающая в себя таблицу умножения; процедурами в этом случае будут процедуры умножения числа на число. В двух последних случаях такими средствами выступают специально сконструированные таблицы, а также знания о правилах их использования; процедурами во втором случае будут процедуры действия с таблицами логарифмов и антилогарифмов плюс процедуры умножения, в третьем — процедуры действия с таблицей кубов.

Теперь можно сформулировать гипотезу: в основе формирования у индивида способа решения задачи, или, что в данном отношении то же самое, в основе формирования осознанного решения задачи, лежит анализ применяемых в решении средств. Анализ в этом случае должен идти не с акцентом на простую последовательность действий, т. е. не по линии рассмотрения отдельных процедур действия, а по линии исследования того при помощи чего мы действовали, выяснения природы средств, на основе которых были построены процедуры нашего действия.

Анализ употреблявшихся в некотором акте деятельности средств сам есть деятельность. Следовательно, имеется два акта деятельности, связь между которыми состоит в том, что задача последующего акта деятельности заключается в исследовании средств предыдущего акта. В каждом акте деятельности по решению задачи принимают участие несколько разных средств; может оказаться, что во втором акте деятельности рассматриваются не все средства первого акта, а лишь некоторые из них. Поясним на примере. При решении алгебраической задачи употребляются самые разные средства, грубо их можно разделить на: 1) средства, на основе которых осуществляется переход от условий задач к составлению уравнения; 2) средства преобразования алгебраического уравнения к некоторой канонической форме; 3) арифметические средства.

Последние две группы средств распределены в оперативных системах алгебры и арифметики и отрабатываются там. (О понятии «оперативная система» см [91]).

Когда мы говорим об анализе средств решения учебных задач, то здесь специфическими выступают средства первой группы, данные средства не формализованы, по их поводу — выбор, последовательность задания и т. д.— не существует единого мнения, они отданы на произвол интуиции и опыта каждого отдельного педагога, значительно усложняя его работу.

Нам сейчас важно подчеркнуть, что, каковы бы ни были эти средства, ничто не меняет смысла нашего утверждения о неоходимости особого акта анализа средств для складывания способа решения задач; различие анализируемых средств приводит лишь к различию способов их анализа в конкретном виде, но не отменяет его необходимости.

Спрашивается: какими путями идет этот анализ, на какой основе, при помощи чего? Первоначально мы дадим только очевидный негативный ответ: такой анализ осуществляется не с помощью имеющихся у ученика математических средств. Правомерна версия, что он носит рефлексивный характер и, следовательно, регулируется совокупностью логических представлений. В нашей работе мы принимаем именно эту версию.

Последнее, что необходимо отметить, это изменение деятельности по решению задач после осуществления второго акта деятельности: вырабатывается особое знание, регулирующее последовательность процедур, т. е. устанавливается то, что мы в дальнейшем определим как собственно способ решения задач, а с этим связана такая психологическая характеристика, как осознанность решения.

IV. НЕОБХОДИМОСТЬ ОСОБЫХ ЗАДАЧ. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ УЧЕБНЫХ ЗАДАЧ И ЗАДАНИЙ

После того как была сформулирована необходимость в особом акте деятельности, направленном на анализ средств некоторого другого акта, встает вопрос, как этот акт деятельности реализовать. На него необходимо прежде всего ответить абстрактно, ибо, конечно, в каждом конкретном случае это будет своя особая реализация.

Мы не найдем ответа на поставленный вопрос в стабильных задачниках и учебниках. Учебник на этот вопрос ответа не дает, а стабильный задачник содержит набор задач на вычисление и доказательство и небольшую группу задач иного типа — их мы разберем ниже.

Ясно, что задачи на доказательство для этой цели непригодны — в них отрабатываются некоторые моменты, связанные с надстраиваемой над оперативной системой алгебры теоретической системой. Непригодны и простые задачи на вычисление. Сложные задачи те, которые мы будем разбирать, для которых как раз и требуется выделение особых актов деятельности по анализу средств.

Заметим, что отсутствие в учебниках и задачниках особых моментов, связанных с анализом средств решения задач, вовсе не означает, что такой анализ никогда не производится в школьной практике. Учитель может в ходе объяснения давать соответствующие комментарии о характере таких средств. Насколько этот комментарий и специальные вопросы отделяются учащимися от решения задач и выделяются ими как особые, всегда находится во власти случая, во власти того, насколько богата интуиция педагога, насколько велик его опыт. Говоря, что это искусный педагог, что его искусство преподавания велико, мы и подчеркиваем именно это наличие интуиции, основанное на опыте, которое мы не научились передавать, т. е. не превратили в объект научного рассмотрения.

Итак, в складывании способа решения задач необходимо присутствие особых актов деятельности, направленных на анализ средств; эти акты должны быть оформлены, т. е. они должны приобрести вид общественно-зафиксированных задач или заданий. Таких задач или заданий практически нет. Где выход из этого положения? На наш взгляд, выход один — их нужно придумать, использовать для этого все ценное из предшествующего опыта. Они должны быть фиксированы и введены в стабильные задачники наряду с прочими заданиями.

Обратимся к анализу того, что имеется на сегодняшний день. Нельзя сказать, что никто не формулировал особых задач или заданий, ведущих к складыванию способа решения таковых задач. Отдельные методисты неоднократно и весьма различными способами выделяли из типовой задачи, взятой как целое, некоторые ее части и их специально обрабатывали в особые самостоятельные задания. Даже в такой, не совсем адекватной, на наш взгляд, постановке вопроса,— ибо суть дела состоит не столько в выделении и отработке некоторых частей решения, представленных как самостоятельные задания, сколько в построении последовательности особым образом связанных задач [1], — содержится очень много интересного. К сожалению, эта мысль методистов со всеми вытекающими из нее последствиями не получила должного развития; она не была разработана как принцип и осталась на уровне отдельных, рассеянных в общем контексте изложения ценных замечаний.

Осколками этих представлений выступают некоторые задачи из стабильного задачника. Примером служит задача, где требуется, имея окончательное уравнение, составить для него условия. Предполагается, что если учащийся окажется в состоянии построить условие такой типовой задачи, то он, несомненно, будет осознанно решать задачи подобного типа (см. задачи № 783—788 [6]). Другой пример — где даны все условия, но опущены конкретные данные и на их месте стоят точки. Предполагается, что, подставляя на место точек числовые значения, координируя их, ученик лучше усваивает характерные для данного типа задач соотношения величин (см. задачи № 790 и 791 из того же задачника). В обоих случаях поставлена цель — как-то связать вопрос, условия и продукт некоторого порядка действий, т. е. те компоненты, которыми ранее была охарактеризована осознанность. Несомненно, задачи такого типа направлены на анализ средств решения других задач сборника.

Несколько замечаний по поводу подобных задач. Во-первых, неясно их место в общей системе задач. Напрасно мы искали бы однозначных указаний, зачем они введены в стабильный сборник. Во-вторых, они преследуют цель построения способа решения окольным путем, так как не направлены непосредственно на анализ средств решения задачи. Это еще раз подчеркивает тот факт, что идея о необходимости специальных заданий по анализу средств не была разработана как принцип, а существовала лишь в виде несистематизированных отрывочных замечаний.

Введение таких специальных задач и пояснений к ним должно вызвать соответствующие изменение структуры задачников. Сначала будут даваться задачи с применением определенных средств. Затем пойдут те задачи, которые позволяют отрефлектировать эти средства и обозреть их. После этого, как разные типы, будут идти задачи с различными комбинациями данных средств. Необходимость введения цепи задач, включающих в себя как математические, так и специально подобранные задачи и задания, вытекает из общего хода нашего рассуждения. Начав с утверждения о необходимости анализа средств некоторого акта деятельности, мы вынуждены были выделить этот анализ в некоторый самостоятельный акт, но он должен быть в чем-то выражен, отделен от предшествующего акта; таким образом, мы имеем последовательность по крайней мере двух актов деятельности. Но второй акт деятельности изменяет характер действования в первом, тем самым мы имеем и третий акт деятельности. Таким образом, уже в предварительном рассмотрении зафиксировано наличие по крайней мере трех актов деятельности, которые и будут образовывать цепи

[1] За последнее время появился ряд работ, ориентированных именно в этом направлении [11, 12].

V. ХАРАКТЕРИСТИКА ВЫБРАННОГО ТИПА ЗАДАЧ. НОРМА. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ. ИСХОДНЫЕ ЗНАНИЯ

Наиболее типичны для стабильного сборника задачи на зависимость трех параметров. Сюда относится большинство задач на движение, работу, соотношения площадей и ряд задач на стоимостные отношения, удельный вес и т. д. (Развернутое перечисление попадающих под этот тип задач было дано в работе Эрдниева [1]). В той или иной форме эти задачи проходят через весь курс алгебры — с VI по VIII класс. Для этого типа задач мы и будем добиваться осознанного решения, стараясь регулировать его формирование шаг за шагом.

Опишем первоначально норму, которая должна сложиться.

Рассматриваемый нормативный способ решения подобных задач распадается на две большие, отличающиеся друг от друга группы процедур: во-первых, процедуры, связанные с обозначением величин через известные данные и вводимые неизвестные, а также процедуры по составлению уравнения; во-вторых, процедуры по решению полученного уравнения, которые специально отрабатываются на примерах, и мы не будем их касаться. Наибольшую трудность при решении задачи составляют процедуры первого типа, можно сказать, что выражение «решить задачу» эквивалетно выражению «составить уравнение».

Когда установлено, что задача подпадает под тип задач на связь трех параметров, процедуры по составлению уравнения могут регулироваться следующим общим правилом: один из параметров принимается как неизвестная величина; второй параметр выражается через уже введенную неизвестную и известные величины (в общем случае иногда по нему вводятся известные величины); третий параметр на основе использования заданной в задаче зависимости трех параметров выражается через первые два параметра. Заданное в тексте и еще не использованное в решении соотношение между численными значениями по третьему параметру служит основой для составления уравнения. Так сформулированное знание о способе решения выступает как средство, на основании которого это решение происходит. И в этом смысле, оно выступает как конечная цель, которую преследует педагог, формируя у учащихся умение решать подобные задачи.

В начале предыдущего абзаца была сделана оговорка: «Если задача подпадает под данный тип». Знание, определяющее тип этих задач, формулируется таким образом: если в условиях задачи даны две ситуации, каждая из которых описывается связью трех параметров, математически выражаемой в общем виде формулой $AB = C$, причем одноименные параметры этих двух ситуаций поставлены в соотношение друг с другом, то мы имеем задачу данного типа. Такое знание, будучи сформировано, также выступает как необходимое средство решения. Оно как бы включает ранее разобранное средство, предшествует ему, поэтому также выступает как конечная цель, которую преследует педагог, отрабатывая решения данных задач.

Проиллюстрируем вышесказанное на разборе задачи № 1199 [6]: «Бригада коммунистического труда должна была выполнить заказ за 10 дней. Ежедневно перевыполняя норму на 27 деталей, бригада за 7 дней работы не только выполнила задание, но еще изготовила сверх 54 детали. Сколько деталей в день изготовляла бригада?»

Процедуры выражения величин и составления уравнения. Возможны два хода: либо мы будем вводить неизвестную величину X через работу, либо через мощность. Разберем последний случай (первый случай, с нашей точки зрения, будет ему тождествен). Обозначим количество

изготовляемых деталей через X, тогда количество деталей по плану будет X — 27. Мы обозначили через известное и неизвестное величины по первому параметру. В нашем конкретном случае величины по первому параметру (времени) даны — 7 и 10 дней. На основе соотношения — работа равна произведению мощности на затраченное время — выражается третий параметр через первые два. Количество работы в первом случае 10 (X — 27) и во втором — 7X. В то же время эти величины, по условию задачи, находятся в определенном отношении: произведенная работа (во втором случае) превосходила работу по плану (в первом случае) на 54 детали. Используя это соотношение, мы получаем искомое уравнение $10 (X - 27) - 54 = 7X$.

Приведенные два средства и образуют норму, которая должна быть усвоена учащимися. В данном случае она складывается из двух знаний, которые регулируют последующую процедуру решения.

Когда употребляется термин «норма», то выделяется совокупность тех деятельностей или та деятельность, которая должна быть усвоена учащимися. И следовательно, этот термин, по сути дела, социологический; здесь не раскрывается, каково строение той деятельности, которая должна быть усвоена. Когда же мы говорим о способе решения как о норме, то здесь мы переходим к рассмотрению строения деятельности.

Мы неоднократно употребляли термин «способ решения задач», здесь нам представляется наиболее удобным его ввести. Разобранное нормативное решение конкретной задачи дает возможность сделать это, поскольку очень удобно для пояснений отсылать к этому решению.

Употребление термина «способ решения задач» в психологической и методической литературе крайне неопределенно.

Впервые серьезную попытку определить это понятие сделал в своем исследовании Г. П. Щедровицкий [9]. Нам представляется чрезвычайно важным и правильным выдвигаемое там положение о характеристике способа решения задач через составляющие. Напомним, что им выдвигались две составляющие способа — средства перехода к выражениям оперативной системы и собственно движение в оперативной системе. Аналогично получилось и у нас: если рассмотреть разобранную выше задачу, то там также можно выделить средства перехода к выражениям оперативной системы (это будет правило определения типа и правило составления уравнения) и соответственно движение по оперативной системе (решение уравнения). Применительно к нашему случаю имеет смысл разделить первую составляющую на две, ибо выделенные нами ранее правила имеют разную функцию в решении. Составляющие способа решения задаются не описательно, т. е. такие-то и такие-то конкретные процедуры решения, а раскрываются как средства, на основании которых строится ряд таких процедур, т. е. функционально. На основе первого правила строятся процедуры по определению типа задачи; его функция в способе решения — определение того, какой собственно способ решения будет применяться. На основе второго правила способа решения строятся процедуры по переводу выражений текста в собственно алгебраическое выражения, т. е. уравнение. Его функция в способе решения — обеспечить переход к выражениям оперативной системы.

С учетом этого разделения (такое разделение на определение типа и собственно решение на другом материале было проведено Л. Н. Ландой [4]) мы можем определить, что такое способ решения задач для нашего случая. Схематически его можно изобразить как последовательность трех групп средств

схема 1

Тогда овладение способом решения задач есть овладение этими группами средств. Применительно к различным задачам и, соответственно, способам их решения — это будут различные средства.

Можно было бы попытаться задать нормативный способ решения задач учащимся сразу, но, как подтверждает практика (и наши эксперименты), они его не берут. В его знаковой форме (два правила) свернуто содержание, прошедшее через ряд промежуточных этапов. Если эти этапы опустить, то само содержание появляется как бы извне, и единственное, что остается сделать учащимся,— просто его запомнить, причем совершенно непонятно, как при этом они могут восстановить само это содержание. Попытки давать такие правила в лоб поэтому в большинстве случаев не приводят к хорошему результату, даже если кажется, что учащиеся понимают эти правила. Не схватывая имеющихся в них содержаний, они не могут соотнести эти правила с реальными случаями решений. Поэтому предварительно необходимо построить это содержание в особой знаковой форме, соответствующей разобранным выше правилам. (Этот вопрос специально и более подробно обсуждался нами в другом месте [2, 3]. Материалы возникшей дискуссии по вопросам алгоритмического подхода к обучению дают возможность сопоставить обе точки зрения [3, 5, 8]).

Чтобы построить способ решения той или иной задачи, учащийся должен владеть определенными знаниями, которые выступают как средства. Очевидно, что именно конечная цель — обучение способу решения задач — определяет, какие это будут средства, применительно к каждому отдельно взятому конкретному случаю.

Какие же исходные знания предшествуют разбираемому типу задач? Для нас важно выделить из имеющейся у учащихся совокупности средств следующие три знания:

1. *Знание о группе преобразований над формулами типа* $AB = C$, т. е. скажем, знание, позволяющее выполнять переход от $s = vt$ к $v = \frac{s}{t}$ и т. д. Это знание специально отрабатывается на группе задач, предшествующих разбираемому классу. Например, задача № 11 [6]: «1. Пароход прошел за 4 часа 80 км. Найти среднюю скорость парохода в час. 2. Составить формулу для вычисления скорости парохода в час, если известно, что за t часов он прошел s км. Вычислить по этой формуле ско-

рость парохода в час, если $t = 2$, $s = 36$; $t' = 3$, $s' = 45$». Это знание включает в себя не только возможные преобразования над выражением $AB = C$, т. е. $A = \frac{C}{B}$ и $B = \frac{C}{A}$, но и соотнесено с различными предметными действительностями, т. е. руководствуясь им, учащийся, встречая в тексте условие, где связываются, например, общая стоимость, стоимость отдельного продукта и количество продуктов, может написать соотношение: стоимость отдельного продукта равна общей стоимости, деленной на количество отдельных продуктов. Мы не рассматриваем, как складывается это знание, а берем его как данное.

2. Представление об отношении целого и части. Мы исходим из того, что оно уже сложилось, т. е. учащийся способен найти по частям целое и по целому и известной части неизвестную часть [1]. Как и в первом случае, еще до того, как учащийся приступает к изучению задач разбираемого класса, он прорешал много задач на целое и часть, в частности, в курсе арифметики.

3. Представление об изоморфизме выраженных в условиях частей текста и конечного уравнения. Анализ этого момента был также дан в совместной работе Г. П. Щедровицкого и С. Г. Якобсон [10]. Мы воспользуемся приводимым ими примером: «На дереве сидели птички, прилетело еще пять, и всего стало 12 птичек. Сколько было на дереве птичек?» Условие этой задачи можно разбить линиями на шесть частей. Мы получим следующую запись: «На дереве сидели птички|, мрилетело еще |5| и всего стало | 12 птичек|. Сколько птичек было раньше на дереве?». Каждая часть, кроме шестой, где формулируется вопрос, изоморфно переводится в уравнение $X - 5 = 12$, каждому знаку уравнения соответствует часть условия. Как видно, процедуры решения этой задачи полностью регулируются двумя выступающими как знания средствами — представлением о соотношении целого и частей и знанием об изоморфизме частей текста и конечного уравнения. Можно сказать, что эти знания выступают как средство перехода к выражениям оперативной системы, т. е., с точки зрения введенного нами понятия способа, как вторая группа средств.

[1] Анализ категории «целое — часть» применительно к решению задач приведен в работах Г. П. Щедровицкого и С. Г. Якобсон [9, 10].

VI. НЕДОСТАТОЧНОСТЬ СТАРЫХ СРЕДСТВ, СИТУАЦИЯ РАЗРЫВА. ВВЕДЕНИЕ НОВОГО СРЕДСТВА И ПРИМЕНЕНИЕ ЕГО В НОВЫХ ПРЕДМЕТНЫХ ОБЛАСТЯХ

Попытаемся при помощи ранее описанных средств решать задачу № 110 для VI класса [6]: «Длина прямоугольника вдвое больше его ширины. Когда ширину прямоугольника увеличили на 3 м, то площадь ег увеличилась на 24 кв. м. Определить первоначальную длину и ширину прямоугольника».

Если мы на основе сложившегося представления об изоморфизме начнем непосредственно переводить текст, точнее, его части в алгебраические выражения, то в итоге мы не сможем получить уравнения. Этот перевод в чистом виде не удается в ряде моментов, например при обозначении площадей, и не будут «вязаться» между собой отдельные части текста. Оказывается, что это средство не срабатывает при решении данной задачи.

Аналогично не дает результат и применение двух других средств. Выражение одного параметра по двум другим известным ранее соотносилось с ситуацией, где, кроме них, ничего другого не было и всегда были известны значения двух параметров; в этой же задаче не дано ни одного значения. Площади двух прямоугольников связаны отношением целого и части через величину их разницы — 24 кв. м, но значения этих площадей не даны. Представление о целом и части оказывается недостаточным для решения: как уже было показано выше, оно является средством для решения простых задач только совместно с представлением об изоморфизме.

Складывается ситуация, известная под названием *ситуации разрыва.* Учащиеся понимают и принимают предложенную задачу — вычислить значение первоначальной длины и ширины прямоугольника; они решали многократно задачи на вычисление какого-либо параметра, это для них не ново. В то же время арсенала имеющихся у них средств недостаточно для ее решения. Необходимо вводить либо принципиально новые средства, ничего общего со старыми средствами не имеющими, либо вводить новое средство, как некоторую комбинацию старых с некоторой добавкой, задающую новизну. Применительно к нашему случаю это будет второй путь.

Прежде чем задавать новое средство, педагогически важно дать понять, что старыми средствами задача не может быть решена. Действительно, экспериментируя с учащимися, порой встречаешься с совершенно бессмысленными, на первый взгляд, ответами. Так, в нашем эксперименте с учащимися 6 класса предлагалась разбираемая задача № 410 Экспериментатор ограничивался наблюдением хода решения и иногда задавал вопросы. Приведу одну характерную для слабого ученика запись выражения: $X \times 2X + 3 = 24$. В ходе дальнейших вопросов учащийся сам отвергает им написанное. Но составить уравнение самостоятельно не может. Такая запись и ход решения характерны с рядом вариаций — они для нас несущественны сейчас — для многих слабых учащихся. В чем дело? Попав в ситуацию разрыва, такие учащиеся продолжают применять старое, известное им средство — в данном случае представление об изоморфизме. Для них первых шаг в продвижении вперед — понять, что в этих случаях и в таком виде оно неприменимо.

Очень интересно отметить весьма характерную реакцию у сильных учащихся, их ответ: «Мы такие задачи не решали». И это весьма симптоматично. Разница в деятельности — применение известного средства у слабых учащихся и отказ от их использования у сильных — позволяет нам еще раз охарактеризовать введенное по схеме представление о способе и акцентировать необходимость различить средства перехода к выражениям оперативной системы на две группы — средства определения типа и собственно средства перехода. И у сильных и у слабых учащихся имеются умения по использованию средств оперативной системы (решение уравнения) и собственно средств перехода (представление об изоморфизме, соотношение целого и части). Однако, мы утверждаем, у сильных учащихся сформирован способ решения задач, предшествующих разбираемому нами типу, а у слабых нет, следовательно, первые владеют способом решения, а вторые нет. Здесь хорошо видна обязательность характеристики способа решения задач через три составляющие.

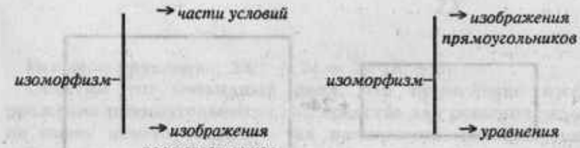
Отметим также, что мы имеем отличную от ранее рассматриваемых нами процедуру проверки наличия способа решения задач. Она состоит в предложении ученику задачи, нерешаемой данным способом. Попытки ее решения старыми средствами будут говорить о том, что способ

решения не сформирован, а имеется лишь механическое воспроизведение некогда заданного образца решения. При наличии способа решения последует указание, что она им не решается — у учащихся такой ответ может принять форму: «Мы не знаем, как решать такие задачи».

Новое средство, позволяющее решить эту задачу (с попутным синтезом старых средств)— применение графических изображений, двух прямоугольников. Они выступают в очень интересной функции. Зарисовка этих прямоугольников использует знание о зависимостях, математически выражаемых общей формулой $AB = C$. В изображении связи прямоугольников используется представление о соотнесении части и целого. В этом смысле мы и говорили о синтезе всех предшествующих средств. После того как эти прямоугольники построены, оказывается, что можно установить связь изоморфизма уже между ними и конечным уравнением.

Абстрактно такую двойную связь изоморфизма[1] можно представить следующей схемой:

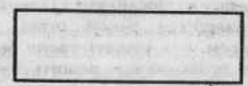
схема 2



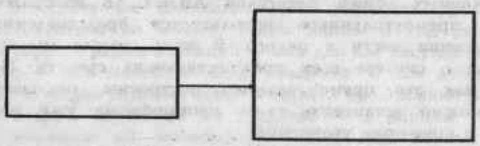
Проследим шаг за шагом, как это происходит на решении задачи № 410. При этом удобно снова воспользоваться черточками для разделения условия задачи на части: «Длина прямоугольника вдвое больше его ширины. Когда ширину прямоугольника увеличили на 3 м, то площадь его увеличилась на 24 кв. м. Определить первоначальную длину и ширину прямоугольника.

[1] На ином материале аналогичные идеи проводились В. А. Лефевром и В. И. Дубовской [7].

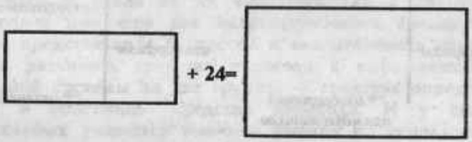
Построение изображений:



1) «Длина прямоугольника больше его ширины»
2) «Когда ширину прямоугольника увеличили на 3 м»,



поскольку относительно длины ничего не сказано, то предполагается, что она осталась той же самой. В этом шаге появляется изображение второго прямоугольника
«... то площадь его увеличилась на 24 кв. м»;



На этом пункте построение изображения окончилось. Покажем, что используя это изображение как средство, мы опять можем опираться на представление об изоморфизме, но уже не частей текста и конечного уравнения, а данного изображения и конечного уравнения. Введя в изображение обозначения параметров, мы получим искомое уравнение, опираясь при этом на представление о связи трех параметров через соотношение AB = C,

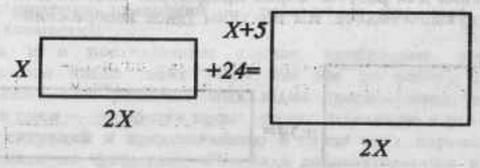
Ширина первого прямоугольника X

Длина первого прямоугольника вдвое больше ширины 2X

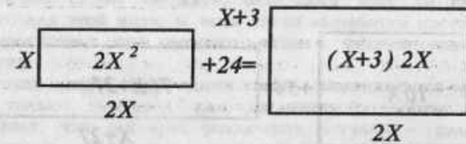
Длина второго прямоугольника осталась прежней 2X

Ширина второго прямоугольника увеличилась на 3 м X + 3

Подставляем эти выражения в изображение



и, поскольку площадь прямоугольника равна произведению длины на ширину, имеем:



Искомое уравнение: $2X^2 + 24 = 2X (X + 3)$.

Отметим тот очевидный факт, что применение изображения прямоугольников как средства для решения задач не имеет ничего общего с так называемой наглядностью.

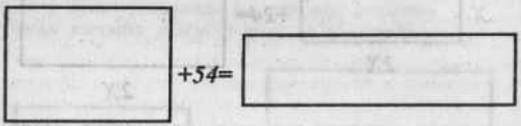
Как показали наши опыты, данный способ решения берется почти всеми учащимися VI класса. Трудности возникали там, где слабые ученики не представляли себе формулу площади прямоугольника либо даже не могли его начертить [1].

В проводившемся нами эксперименте показано, что отработка такого пути решения вполне возможна на примере всего лишь двух задач. Следующий шаг — применение отработанных процедур с построением точно таких же изображений на задачи с иным конкретным предметным

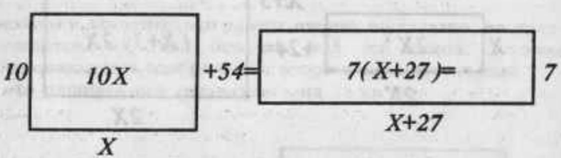
---

[1] Нас справедливо могут упрекнуть, что при таком употреблении изображений можно решать только такие задачи, где значения площади (соответственно, расстояния, работы и т. д.) неизвестны. Одно небольшое изменение в изображениях снимает эту трудность.

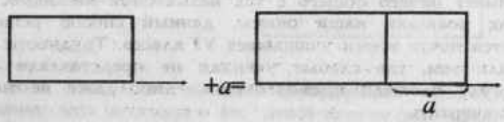
содержанием. Так, например, можно взять уже приводившуюся задачу № 1199. Здесь требуется добавочное пояснение. По вертикали и горизонтали мы будем откладывать время и мощность, а в центре прямоугольника писать значения для работы. Строя процедуры, аналогичные предшествующей задаче, мы получим такое изображение:



используя которое мы изоморфно переходим от этого изображения к соотвествующему уравнению:



т. е. 10X+54=7(X+27)



В данном случае сравниваются не площади, а линии, выделенные стрелками. Мы специально не останавливаемся на разборе этого случая, лишь укажем, что в 1964 г. нами совместно с методистом В. И. Крупичем был проведен обучающий эксперимент в восьмых классах школы № 715 с применением такой модификации в изображениях. В принципиальных пунктах он строился по той же схеме, что приводится дальше в настоящей работе. На предложенной нами модели В. И. Крупич разработал классификацию задач, изложенную им в сообщении «Об одном эффективном методе решения алгебраических задач в средней школе» (сб. Х. «Новых исследований в педагогических науках» 1967). Однако основные идеи (в силу различия наших методических подходов) не могли войти в его сообщение.

т. е. к 10Х + 54 = 7 (Х = 27).

Во избежание недоразумений необходимо сделать одно замечание: мы только в целях удобства описания разделяем процедуры построения изображения как средства и процедуры последующего выражения значений параметров и составления уравнений — реально, в практике, они идут совместно.

Как и в последующем случае, необходимо решить небольшое число таких задач: по две на работу и на движение. При решении этих задач преследуются те же самые цели — отработка процедур по выделению в условии двух ситуаций и представлению о связи трех параметров как связи по формуле: «Площадь прямоугольника равна произведению его сторон».

После решения этих задач у некоторых учащихся может выработаться знание об этих задачах, так о типе, мы подчеркиваем слово «может», ибо сами еще не сделали ничего для этой цели, и, если такая выработка произошла, то произошла она помимо нашего целенаправленного участия.

С точки зрения становления способа решения пока заготовлен только материал для дальнейшей работы. Даже тот факт, что для трех различных случаев — площади, рработы и движения — при решении были применены одни и те же процедуры, может не осознаться как закономерный. Для того чтобы эта закономерность стала явной, нужна постановка специальной задачи, в которой показывалась бы тождественность итогового уравнения у задач с различным предметным содержанием. В таком случае одно из предметных содержаний выступает как эталон, в который переводимо любое другое предметное содержание. В нашем случае удобно любое предметное содержание переводить в задачи на площадь,— это обусловлено специфической природой применяемого средства.

Конкретно это выглядит так: после составления уравнения для задачи на движение формулируется новая задача — исходя из тех же данных составить условие новой задачи, но уже на площадь. Такую работу лучше всего провести у классной доски, с тем чтобы впоследствии дать аналогичное задание, но уже для задачи на работу.

При проведении этой работы должны четко иметься в виду преследуемые цели — формирование представления о том, что эти задачи составляют один тип.

Фактически единство типа обусловлено тем, что они решаются за счет применения одного и того же средства и, следовательно, имеют единообразную процедуру решения. Но на этом этапе учащиеся еще не становятся на рефлексивную позицию, выделения и анализа средств, но просто нащупывают общую закономерность хода решения, решая варьирующиеся задачи.

VII. АНАЛИЗ СРЕДСТВ. ДВОЙНОЙ АНАЛИЗ ПРИМЕНЕННЫХ ЗНАКОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ. ФОРМИРОВАНИЕ ЗАДАННЫХ СРЕДСТВ И ИЗМЕНЕНИЕ ХАРАКТЕРА ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Следующий шаг на пути формирования способа решения — рефлективное рассмотрение ранее решенных задач на предмет установления тождества применяемых средств и процедур. (Такой шаг не представляет собой задачи в принятом математическом значении этого слова.)

В предыдущей работе учениками было решено в среднем 7—10 задач. Из числа этих задач можно отобрать три задачи, руководствуясь тем соображением, чтобы они имели разное предметное содержание — площадь, движение, работу. Пусть такими задачами будут уже разобранная нами задача № 410 и задачи № 784 и 785. На классную

условие задачи	*изображение*	*уравнение*
№ 410	$X\boxed{3X\cdot X} + 24 = \boxed{(X+3)\,3X}\; X+3$ $3X$	$3x^2 + 24 = 3x(x+3)$
№ 784	$14\boxed{14X} = \boxed{10(X+20)}\,10$ $X \qquad X+20$	$14X = 10(X+20)$
№ 785	$30\boxed{30X} = \boxed{28(14\tfrac{1}{2} - X)}\; 28$ $14\tfrac{1}{2} - X$	$30X = 28(14\tfrac{1}{2} - X)$

доску и в тетради учеников переносятся: условия этих задач, применявшаяся при их решении особая знаковая форма — изображения прямоугольников — и получившиеся в итоге решения уравнения. Строится следующая запись, служащая средством выражения материала для последующих сопоставлений.

Вся работа в дальнейшем идет на сопоставлении этих изображений между собой и с условиями.

В наших обучающих экспериментах (восьмые классы, две группы отстающих учеников седьмых классов, школа № 715, 1964/65 учебный год) такая работа велась следующим образом. Учитель, стоя у доски, задавал вопросы, на которые учащиеся отвечали. Такая форма построения процесса обучения очень импонировала учащимся и вызывала их большую активность.

Первый вопрос: почему мы имеем в наших случаях всегда два изображения, т. е. два прямоугольника? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо сопоставить изображения для каждой задачи с ее условиями. В ходе этого соотнесения формы с условиями выясняется, что в условиях всегда заданы две ситуации (мы разбираем простейший случай, несколько ниже будет показано, что более сложные случаи сводимы к различным комбинациям сопоставления двух ситуаций — два по два, двойное сопоставление разных ситуаций с какой-то одной и т. д.). Каждый раз они задаются в разном описании: так, в задаче № 410 имеется один прямоугольник, потом было произведено некоторое преобразование и получился второй прямоугольник; в задаче № 784 первая ситуация должна была сложиться по плану, но реально имела место вторая ситуация; в задаче № 785 в одном случае мы имеем движение связного в город, другой случай образует его движение из города и т. д.

Интересные данные мы получили в результате анкетирования, которое проводилось нами после обучающего эксперимента совместно с методистом В. И. Крупичем. В анкетах был такой вопрос: удобны ли изображения прямоугольников для решения задач или лучше обойтись без них? Очень большое число ответов, кроме двух, было положительным; причем учащиеся подчеркивали, что они «видят» (их термин), какая эта задача и как ее решать.

Второй вопрос: как же построены эти изображения, каждое из которых фиксирует некоторую конкретную ситуацию? В случае задачи № 410 по вертикали откладывалась ширина, а по горизонтали — длина. В центре изображения записывалась численная величина площади. В задаче № 784 по вертикали откладывалась мощность (производительность в день), а по горизонтали — время работы. В центре изображения — величина работы. В задаче № 785 по вертикали откладывалась скорость, по горизонтали — время, в центре — путь. Выпишем рядом с изображениями формулы соответствующих зависимостей—

S (площадь прямоугольника) = t_1 (ширина) x t_2 (длина)
A (работа) = N (мощность) x t (время),
(путь) = v (скорость) x t (время).

Сопоставляя эти формулы, приходим к выводу: во-первых, в них связываются три величины (как мы теперь будем говорить ученикам, величины параметров); во-вторых, если обозначить эти параметры буквами A, B, C, то их зависимость задается формулой AB = C, в-третьих, применительно к изображению параметры A и B выражаются через стороны прямоугольника, а параметр C — как его площадь.

Соотнеся полученные результаты с условиями, получаем следующее положение: каждая ситуация условий задается тремя параметрами, связанными между собой зависимостью ттипа AB = C.

Третий вопрос. До этого момента рассматривались и сопоставлялись отдельные изображения, но они всегда даны нам в паре. За счет чего это происходит? Последовательно сопоставляя изображения каждой пары, получаем представление о том, что одноименные параметры поставлены между собой в некоторое отношение. (Возможен случай соотношения разноименных параметров, например: скорость одного тела численно в три раза больше времени, затраченного при движении, другим телом. Такие случаи несколько искусственны, к тому же они в общей типовой характеристике меняют только последнее условие — об одноименности параметров). Для задачи № 410 «ширину прямоугольника увеличили на 3 м» и «площадь увеличилась на 24 кв. м». В задаче № 785 — соотношение по времени и равенство пути. В общем, как показало исследование, возможны три типа соотношений величины параметров, которые математически можно выразить так: $ka_1 = a_2$, $a_1 + a_2 = k$ и $a_1 = a_2$, где a_1 и a_2 — значения одноименных параметров и k — некоторая произвольная постояннная.

Итог трех проведенных сопоставлений суммируется в правило по применению отработанных процедур: в задаче должны быть выделены две ситуации, каждая из которых описывается через связь трех параметров по соотношению AB = C, а одноименные параметры ситуации поставлены в отношение друг с другом.

Итак, если в начале нашей работы это правило вводилось нами как внешнее средство, определяющее возможность построения процедур решения, то теперь это средство нами построено, т. е. выполнено одно из требований к формированию осознанного способа решения.

Изображения из нашей схемы (стр. 389) используются и для построения уравнений. Принимая численную величину одного из одноименных параметров за X, мы на основе имеющегося соотношения выражаем через X и известную величину — другое значение того же параметра. Переходя ко второму параметру, мы либо имеем его численные значения, как в задачах № 784 и 785, либо выражаем их через уже введенные значения, основываясь на указанном в условии соотношении (задача № 410). В соотношении AB = C значения двух величин вполне определяют значение третьей, и, следовательно, мы выражаем значение третьего параметра через значения первых двух для обоих случаев. При построении изображения (на основе условий задачи) зависимость по величине фактически в схеме оказывается уже выделенной и построенной: мы получаем итоговое уравнение.

Конечным продуктом этого анализа будет представление о процедурах решения как о последовательности действий, включающей в себя выражение через неизвестное и известные величины первого параметра, выражение величин второго параметра, выражение третьего параметра через первые два и составление уравнения по третьему параметру через привлечение соотношения его величин по данным условиям. Выше было указано, что такое представление — второе необходимое средство в способе решения задач подобного типа.

После того как сложился такой развернутый способ деятельности, потребность в изображениях (рисовании прямоугольников) исчезает; они выполнили свою функцию строительных лесов. Теперь решение задачи идет по описанной вначале норме. С психологической точки зрения можно утверждать, что способ решения по этой норме будет осознанным, так как в ее построении была задана особая связь трех необходимых компонентов: поставленной зздачи, конкретного условия и последующего построения порядка действий. С точки зрения логики мы сформировали способ решения, так как в процессе проделанной работы учащиеся овладевают всеми тремя составляющими способами решения: средствами определения типа, средствами перехода, а третья группа — средства движения по оперативной системе — ими была отработана в другой деятельности.

VIII. МЕСТО ПРОЦЕДУР ПРОВЕРКИ, ПЕРЕХОД К НОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

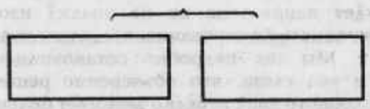
Как уже указывалось, приведенный выше разбор в виде серии целенаправленных вопросов идет под руководством учителя. Насколько усвоены результаты этого разбора, можно проверить, используя те самы процедуры варьирования, о которых мы говорили выше. Как и следовало ожидать, их истинное место в конце уже построенной последовательности, когда мы должны выяснить, а сложилось ли то, чего мы хотели достичь. Применение же их как процедур, ведущих к складыванию осознанной деятельности, как это теперь ясно видно из предшествующего разбора, оставляет все необходимые для этого действия на ученика, лишенного помощи учителя. На наш взгляд, этим объясняются все трудности, возникающие у учащихся при решении алгебраических задач.

Чтобы осуществить проверку, можно предложить нашим учащимся для самостоятельного решения задачу № 799. «Кусок железа и кусок меди весят вместе 373 г, причем объем куска железа на 5 см^3 больше объема куска меди. Найти объем каждого куска, если удельный вес железа 7,8 г/см^3». Эта задача удобна тем, что здесь дается ранее не встречавшееся предметное содержание — удельный вес. Можно подобрать задачу на стоимостные отношения, которые раньше также не встречались в наших экспериментах.

При проверке преследуются две цели. Первая — выяснить, сформировались ли знания, необходимые для решения и этой задачи, что выясняется сразу: мы либо имеем решение, либо нет. В наших опытах, когда эта задача давалась после проведения цикла обучения, мы не наблюдали случая, чтобы эта задача нерешалась (при условии, если учащиеся знали, что такое удельный вес). Вторая цель — выяснить, как учащиеся могут объяснить свое решение, т. е. насколько они владеют при объяснении такими понятиями, как две ситуации, параметры и т. д. Сказанное имеет большое значение для последующего.

Может оказаться, что введенных нами средств недостаточно для решения некоторых задач. Так, если мы со старыми средствами приступим к решению задачи № 1405: «Почттовый поезд, скорость которого на 15 км в час больше скорости товарного поезда, употребляет на прохождение расстояния между городами A и B на 9 часов меньше товарного поезда, а скорый поезд, скорость которого на 10 км час больше скорости почтового поезда, тратит на путь между городами A и B на 3 часа меньше почтового. Определить расстояние между городами A и B и скорость каждого поезда»,— то обнаружится, что выработанных средств опять недостаточно. История повторяется, мы вынуждены строить новую последовательность средств.

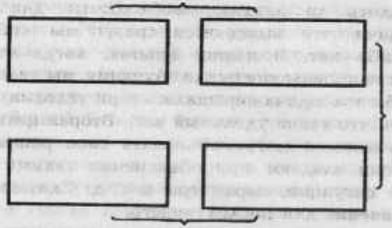
Применявшиеся нами ранее в качестве средства решения изображения (прямоугольника) очень удобно использовать при объяснении решения более сложных задач. Дело в том, что все эти задачи представимы относительно этого средства (изображений) как *составные*. Разобранные нами задачи сокращенно можно представить так:



(1)

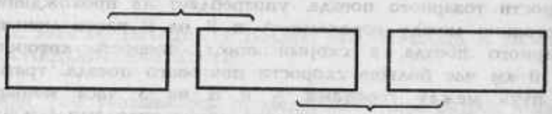
где прямоугольники изображают две ситуации, а перевернутая фигурная скобка — их сопоставление. Абстрактно строятся следующие усложнения:

В случае (2) мы имеем две пары сопоставляемых ситуаций и сопоставление этих пар.



(2)

Несколько другой случай представлен в схеме



(3)

Здесь одна ситуация дважды входит в сопоставляемую пару ситуаций.

В представимости решения сложных задач по этим схемам читатель легко убедится, разобрав по схеме (2) задачу № 1405, а по схеме (3) задачу № 1460. Эти задачи, как правило, вызывающие затруднения у учащихся, при помощи предлагаемых изображений легко решаются.

Чтобы осуществить их осознаное решение, необходимо построить последовательность заданий, аналогичную в основных чертах уже разобранной. Несомненно, это построение будет значительно облегчено, так как здесь основное внимание будет направлено не на анализ изображений, а на способы их комбинирования в соответствии с условиями задачи. Мы так подробно остановились на этом факте лишь в той связи, что объяснение решения сложной задачи подобного типа нередко занимает более половины урока. На наш взгляд, это вызвано только тем, что нет осознанного решения простых задач, лежащих в основе этих сложных.

IX. СХЕМЫ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УСВОЕНИЯ

В разбираемых нами задачах составление уравнения

обеспечивается совместным применением двух средств. Они составляют то, что может быть названо абстрактным правилом (приемом) составления уравнения для всех задач данного типа. Усвоение этого абстрактного правила предполагает, с нашей точки зрения, наличие особых процессов. Они конституируют вполне определенный механизм усвоения; специально подчеркнем, что это один из возможных в ряду многих других механизм.

Как по последовательности, так и в целостном представлении деятельность учащихся по усвоению абстрактного правила (для разбираемого случая и случаев, сходных с ним) может быть представлена следующим образом.

Первый этап — построение прямоугольников по образцу, задаваемому учителем. Обозначим тексты условий задач и совершаемые над этими текстами процедуры, как *конкретные содержания*, отличия их друг от друга индексами. Получающиеся в итоге этих процедур над текстами изображения прямоугольников назовем *конкретными знаковыми формами*, имея в виду при введении такого выражения, что в каждом конкретном случае получаемые изображения представляют собой не только итог, но и по функции — фформу, накладываемую на конкретные содержания. Употребляемый в обоих случаях эпитет «конкретный» отражает тот простой факт, что учащиеся имеют в данном случае дело с конкретными задачами и не берут их решение как типовое.

Их деятельность может быть представлена (на этом этапе) в виде следующей схемы:

конкретная знаковая форма $_1$ конкретная знаковая форма $_2$

↑ ↑

конкретное содержание $_1$ конкретное содержание $_2$

Кардинален следующий этап. Он начинается с сопоставления конкретных знаковых форм, что на схеме отражено перевернутыми фигурными скобками:

Мы уже показывали, в чем это сопоставление состоит. Выявленные при сопоставлении моменты тождественности должны быть объяснены; объяснение нельзя найти в самих схема 4

конкретная знаковая форма 1 — конкретная знаковая форма 2 — конкретная знаковая форма 3

знаковых формах. Отсюда следует необходимость отнесения результатов проделанных сопоставлений к конкретным содержаниям и проведения ряда сопоставлений уже в них:

схема 5

конкретное содержание 1 — конкретное содержание 2 — конкретное содержание 3

Это сопоставление: как показано выше, дает элементы абстрактного правила. Целесообразно назвать совокупность этих элементов *абстрактной знаковой формой*, подчеркивая тот момент, что она относится не к решению той или иной конкретной задачи, а к типу в целом. Как *содержание* этой абстрактной знаковой формы выступают уже не условия какой-либо конкретной задачи с процедурами, выполняемыми над ним, а два ряда сопоставлений с отнесением одного ряда сопоставлений к другому. Целесообразно такое содержание обозначить как абстрактное содержание.

Эта схема одного из возможных механизмов усвоения имеет тот смысл, что; во-первых, здесь фиксируется возможный путь овладения абстрактными правилами; во-вторых, подчеркивается, что задание абстрактных правил сразу (на первом этапе) может привести лишь к их заучиванию и даже внешне целесообразному употреблению, но не к овладению ими. Если последнее, как показывает школьная практика, иногда имеет место, то такое овладение складывается у учащихся вне целенаправленной дятельности учителя.

Схема в целом имеет следующий вид (знак ⮌ обозначает действие отнесения) :

схема 6

Абстрактная знаковая форма

↑

Абстрактное содержание

конкретная знаковая форма 1 — конкретная знаковая форма 2

конкретное содержание 1 — конкретное содержание 2

X. ПОСТРОЕНИЕ ОСОЗНАННОГО РЕШЕНИЯ И ПРОБЛЕМА ТВОРЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ УЧАЩИХСЯ

Анализ деятельности по формированию способа решения дает интересные выходы к проблемам, связанным с творческой активностью учащихся.

Ранее мы писали: «При анализе проблем, связанных с деятельностью индивида, для их решения и продвижения ко все более и более глубокому пониманию и отображению существа дела необходимо все время возвращаться к тому, как был выделен материал и основные линии исследования. Необходим анализ методологии самого исследования. Центральным пунктом такого анализа является понятие деятельности и его расшифровка. Высказанное имеет отношение и к проблеме творческой активности учащихся.

Основой для структурного рассмотрения мыслительной деятельности является, на наш взгляд, ее понимание как деятельности замещения, замещения действий с предметами действиями со знаками, введение знаков более высоких порядков. Такое понимание позволяет разбить мыслительную деятельность на ряд уровней, где каждый последующий уровень возникает как замещение предыдущего или предыдущих. Это обеспечивает их взаимосвязь и возможность построения генетического ряда уровней. Последнее, в свою очередь, позволяет построить определенную иерархию действий, к которой подводится ученик, и предугадать могущие появиться вариации.

Проблемы творческой активности в усвоении и применении полученных знаний учащимися заключаются в этой связи, на наш взгляд, в том, что ими схватывается обобщенное понятие механизма перехода от одного уровня деятельности к другому, его замещающему. Важнейшим следствием такого схватывания является выработка направленности на освоение и осознание этого механизма. Такая направленность изменяет весь характер деятельности учащегося, придавая ему тот характер, который мы и называем творческим. Подчеркиваем еще раз ту мысль, что создание такой направленности педагогом может быть успешным только на основе понимания структуры той деятельности, которую осваивает учащийся. И это с необходимостью ведет прежде всего к изучению «структур усваиваемых деятельностей» [1].

Имеется возможность пояснить и уточнить выдвигавшиеся в этой работе установки. Стало более ясным, в чем же заключается механизм перехода от одного уровня деятельности к другому. В нашем случае два таких уровня деятельности резко выражены. С одной стороны, мы имеем деятельность, направленную на решение некоторой задачи,— совокупность процедур, описанных нами в начале складывания способа решения. С другой — деятельность, направленную на анализ применявшихся в этой первой деятельности средств. Вторая деятельность — необходимый перекидной мост между первой и получившейся в итоге, когда были построены два общих необходимых средства, позволяющих решить все задачи данного типа.

Теперь можно сказать, что *направленность на анализ средств* — неотъемлемая принадлежность деятельности, или активности, которой мы приписываем свойство быть творческой.

Наш анализ позволяет сделать еще два замечания по поводу творческой активности учащихся.

Ранее отмечалось, что конечные формируемые нами средства не являются принципиально новыми по отношению к уже сложившимся у учеников средствам, что они синтезируют и снимают ранее имевшиеся средства в некоторое новое средство. Это возможная основа для того, чтобы

ученики сами его строили; причем роль преподавателя может быть сведена к постановке вех на этом пути, которые указывали бы правильную дорогу. Сейчас часто говорят об эвристических методах и приемах обучения. Проводившиеся нами специальные задания на анализ средств таковы по своей форме, что эвристический способ обучения наиболее им соответствует. Действительно, здесь все время ставятся вопросы типа: «А почему это так?», «Как это зависит от условия?» и т. д. Ставя такие вопросы, учитель не просто передает учащимся некоторую сумму знаний, которую необходимо запомнить и усвоить, а побуждает своих учеников к действованию, в то же время линия действования в целом им все время контролируется.

Второй, более важный момент. При таком построении учебной деятельности в скрытом виде мы формируем у учеников логические представления, которые могут потом выступать средствами в ряде совершенно других деятельностей. Implicito все время проводится мысль, реализуемая в каждом конкретном задании, что в основе любой деятельности лежит сопоставление двух, трех объектов с последующим выражением результата этих сопоставлений в некоторой знаковой форме. Можно эту мысль выразить так: каждый раз определенное, выраженное в знаковой форме содержание задается через объекты, с которыми мы действуем, и то, как мы с ними действуем, какую систему процедур прилагаем. В таком случае сама знаковая форма выступает не как нечто внешнее, необходимое для заучивания, а как закономерный результат проделанных действий. Это исключает возможный формализм в заучивании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев Н. Г. Проблема творческой активности и изучение структуры деятельности по усвоению знаний. В сб.: «Тезисы докладов на межвузовской конференции «Психологические особенности творческой активности учащихся». М., 1962.
2. Алексеев Н. Г. Алгоритмы в процессе обучения. В сб.: «Тезисы докладов на II съезде Общества психологов». М., Изд-во АПН РСФСР, 1963.
3. Алексеев Н. Г. Правомерен ли алгоритмический подход к анализу процессов обучения. «Вопросы психологии», 1963, № 3.
5. Ланда Л. Н. Алгоритмический подход к анализу процессов обучения правомерен. «Вопросы психологии», 1963, № 4.
6. Ларичев П. С. Сборник задач по алгебре. М., Учпедгиз, 1961
7. Лефевр В. А., Дубовская В. И. Способ решения задачи как содержание обучения. «Новые исследования в педагогических науках», сб. IV, 1965.

8. Москаева А. С. Алгоритмы и алгоритмический подход к анализу процессов обучения «Вопросы психологии», 1965, № 3.
9. Щедровицкий Г. П. Исследование мышления детей на материале решения арифметических задач. В сб., «Развитие познавательных и волевых процессов у дошкольников». М., «Просвещение», 1965.
10. Щедровицкий Г П. Якобсон С. Г К анализу процессов решения простых арифметических задач. Сообщения I — V «Доклады АПН РСФСР», 1962, № 2 — 6.
11. Эрдниев П. М. Методика упражнений по арифметике и алгебре, М., Учпедгиз, 1965.
12. Эрдниев П. М. Сравнение и обобщение при обучении математике. М., Учпедгиз, 1960.

СОДЕРЖАНИЕ

В. М. РОЗИН
ЛОГИКО-СЕМИОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗНАКОВЫХ СРЕДСТВ ГЕОМЕТРИИ (К ПОСТРОЕНИЮ УЧЕБНОГО ПРЕДМЕТА)

Н. И. НЕПОМНЯЩАЯ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И КОНСТРУИРОВАНИЕ СПОСОБОВ РЕШЕНИЯ УЧЕБНЫХ ЗАДАЧ

Н. Г. АЛЕКСЕЕВ
ФОРМИРОВАНИЕ ОСОЗНАННОГО РЕШЕНИЯ УЧЕБНОЙ ЗАДАЧИ